www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EXERCICE

$\mathcal{M}_n$ est l'ensemble des matrices carrées réelles à n lignes, et F est l'ensemble des matrices unicolonnes réelles à n lignes dont on notera C la base canonique usuelle $(E_1\ E_2\ \ldots\ E_n)$. A est un élément fixé de $\mathcal{M}_n$.

Au réel m on associe l'application de $\mathcal{M}_n$ vers $\mathcal{M}_n$, φ_m, définie par :

(1) $\quad \forall M, \varphi_m(M) = A.M + m.M.A$

PREMIERE QUESTION

a - Montrer brièvement que φ_m est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$.

X étant un vecteur propre de A, et Y un vecteur propre de la transposée ${}^tA$ de A, montrer que $X.{}^tY$ est un élément de $\mathcal{M}_n$, et que c'est un vecteur propre de φ_m.

b - Montrer que le système $\{ E_p.{}^tE_q\ /\ 1 \le p \le n,\ 1 \le q \le n \}$ est une base de $\mathcal{M}_n$.

DEUXIEME QUESTION

On suppose A diagonalisable.

a - Montrer que le système des vecteurs propres de φ_m du type de celui obtenu dans la question 1, a) que l'on peut en déduire, engendre $\mathcal{M}_n$.

b - En déduire que φ_m est diagonalisable, et donner ses valeurs propres en fonction de m et de celles de A.

c - Préciser dans quel(s) cas φ_m est inversible.

TROISIEME QUESTION

On suppose toujours A diagonalisable.

On choisit un réel w, une matrice B de $\mathcal{M}_n$, et on considère l'équation d'inconnue M, élément de $\mathcal{M}_n$:

(2) $\quad A.M + m.M.A + w.M = B$

Dire pour quelles valeurs de w elle admet une solution et une seule, puis dans quel cas elle n'admet aucune solution (on ne demande pas de résoudre cette équation dans le cas général).

Application

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\ m = -2,\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$$

Résoudre l'équation (2), en discutant selon les valeurs des réels a, b, w.

A cet effet, on déterminera une base propre de φ_{-2}, et on considérera l'exercice comme terminé quand on aura exprimé la solution de (2) en fonction de cette base.

PROBLEME

La partie III peut être traitée de façon indépendante. Elle peut l'être aussi en exploitant certains résultats des parties précédentes.

PARTIE I

1 - On pose $Q(X) = \lambda \prod_{j=1}^{j=n} (X - \alpha_j)^{\beta_j}$, où λ est un élément de $\mathbb{R}^*$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ une suite de réels strictement croissante, et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ une suite d'entiers naturels non nuls, n étant un élément de $\mathbb{N}^*$.

Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{Q'}{Q}$.

2 - On suppose maintenant que n est au moins égal à 2.

Pour tout k dans [1 , n], on définit le polynôme A_k par : (1) $\quad A_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{j=n} (X - j)^r$

, où r est un entier naturel non nul,

ainsi que les réels $\gamma_{n,k,r}$ définis par : (2) $\quad \gamma_{n,k,r} = \frac{A'_k(k)}{A_k(k)}$

a - Calculer $\gamma_{n,k,r}$ pour $k = E\left[\frac{n+2}{2}\right]$ (lire " partie entière de").

b - Comparer $\gamma_{n,k,r}$ et $\gamma_{n,k',r}$ lorsque $k + k' = n + 1$.

c - Montrer que pour déterminer l'ensemble des réels $\gamma_{n,k,r}$, n et r fixés, il suffit de calculer ceux dont l'indice variable k est au moins égal à $k_0 = E\left[\frac{n-2}{2}\right]$.

d - Déterminer un algorithme permettant de calculer $\gamma_{n,k,r}$ pour k décrivant $[k_0, n]$, ce pour tout n et tout r.

> On ne demande pas d'écrire un programme, mais seulement de traduire en langage clair les étapes successives des calculs à effectuer.

e - Utiliser cet algorithme pour calculer, avec 6 décimales, les termes des suites $(\gamma_{13,k,2})$ et $(\gamma_{18,k,3})$

f - D'autre part, déterminer un algorithme permettant le calcul de $d_{n,r}$, avec $d_{n,r} = \gamma_{n,n,r}$. Utiliser cet algorithme pour calculer de nouveau $d_{13,2}$ et $d_{18,3}$.

PARTIE II

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une suite réelle strictement croissante, donnée, avec $n \ge 2$.

E, ou $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ est l'ensemble des polynômes réels de degré au plus 2n-1, et du polynôme nul. B est la base $(1, X, \ldots, X^{2n-1})$ de E.

$\mathbb{R}^{2n}$ est l'ensemble des 2n-uplets réels, et C sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n})$.

On définit une application f de E vers $\mathbb{R}^{2n}$ par :

T.S.V.P.

(3) $f(P) = P(a_1)e_1 + P'(a_1)e_2 + \ldots + P(a_j)e_{2j-1} + P'(a_j)e_{2j} + \ldots + P(a_n)e_{2n-1} + P'(a_n)e_{2n}$

1 - Montrer que f est linéaire, déterminer son noyau et son image.

2 - Montrer qu'il existe une base Π, unique, de E, $(P_1, \ldots, P_{2n})$, telle que $f(P_j) = e_j$, pour tout j dans [1 , 2n].

Préciser : a - la matrice de f dans les bases B et C respectivement de E et $\mathbb{R}^{2n}$.

b - la matrice de f dans les bases Π et C respectivement de E et $\mathbb{R}^{2n}$.

c - les coordonnées sur la base Π d'un polynôme quelconque P de E.

Montrer que la connaissance des coordonnées des polynômes P_j sur B permettrait de calculer l'inverse (qu'on ne demande pas) de la matrice obtenue en 2-a .

3 - Montrer que : (4) $P_1 + P_3 + \ldots P_{2n-1} = 1$

4 - Expliciter P_{2n}, puis, plus généralement, P_{2j}, pour tout j dans [1 , n].

5 - Montrer que P_{2j-1} peut s'écrire :

(5) $\left[\prod_{k=1, k\neq j}^{k=n} \left(\frac{X - a_k}{a_j - a_k}\right)^2 \right] \cdot \left[m_j (X - a_j) - p_j \right]$, où m_j et p_j sont des réels.

Calculer le réel p_j. En s'inspirant de l'étude faite au 1, calculer m_j.

6 - Déduire des résultats précédents les identités :

(6) $\sum_{j=1}^{j=n} (C_n^j)^2 (j \cdot \gamma_{n,j,2} + 1) = 1$

(7) $\sum_{j=1}^{j=n} j (C_n^j)^2 \gamma_{n,j,2} = 2 - C_{2n}^n$, où C_n^j est le coefficient de X^j dans le développement de $(X + 1)^n$. (La relation (7) se déduit de la relation (6))

PARTIE III

H est un plan euclidien, et D une direction de droite, fixe, de H. On se propose d'étudier la famille $\mathcal{F}$ des paraboles de H, dont l'axe a pour direction D, et plus particulièrement leur intersection avec deux droites données L_1 et L_2, distinctes, de direction D. Si une parabole de la famille coupe ces droites en A et B, on désigne par T_1 et T_2 ses tangentes en A et en B.

Justifier brièvement l'assertion : quelle que soit $\mathcal{P}$, élément de $\mathcal{F}$, les points A, B et les droites T_1, T_2 existent.

1 - Choix du repère

Montrer que l'on peut, sans nuire à la généralité des études à venir, choisir un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ orthogonaux, de même norme, tel que les équations de L_1 et L_2 dans ce repère sont respectivement $x = 0$ et $x = 1$.

2 - Ce choix fait

On note α et β les coordonnées respectivement de A et B, m et p les pentes (ou coefficients angulaires) des droites T_1 et T_2. Une quelconque parabole de la famille $\mathcal{F}$ détermine alors 4 paramètres, α, β, m, p.

Réciproquement, la donnée de ces 4 paramètres va déterminer, sous réserve, naturellement, de certaines compatibilités, une ou des paraboles de la famille $\mathcal{F}$.

Relations de compatibilité entre les 4 paramètres

a - Montrer que l'on a : $m \neq p$.

b - (α, β, m', p') donnés dans $\mathbb{R}^4$, montrer qu'il existe exactement une fonction polynôme, nulle ou de degré au plus 3, soit P, dont le graphe passe par A $(0, \alpha)$ et B $(1, \beta)$ et admet en ces points pour tangentes respectivement les droites T'_1 et T'_2 de pentes respectives m' et p'.

c - En déduire qu'il existe zéro ou une parabole de la famille $\mathcal{F}$ passant par A et B et tangente en A et B à T'_1 et T'_2.

d - Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe exactement une parabole de la famille $\mathcal{F}$ tangente en A et B à T'_1 et T'_2.

e - Donner alors l'équation de cette parabole.

3 - A et B fixés, $\mathcal{P}$ décrit la sous-famille des paraboles de $\mathcal{F}$ passant par A et B. Déterminer l'ensemble des points décrit par son sommet, ainsi que l'ensemble des points décrit par $T_1 \cap T_2$.

4 - On fixe T_1, et par conséquent A. $\mathcal{P}$ décrit la sous-famille des paraboles de $\mathcal{F}$ qui sont tangentes en A à T_1. Déterminer l'enveloppe de T_2. Comparer les résultats de cette question et de la précédente.

5 - Dans cette question, $\mathcal{P}$ décrit la sous-famille des paraboles de $\mathcal{F}$ dont le foyer est O. Déterminer l'enveloppe de la droite AB et celle de la droite T_2.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail